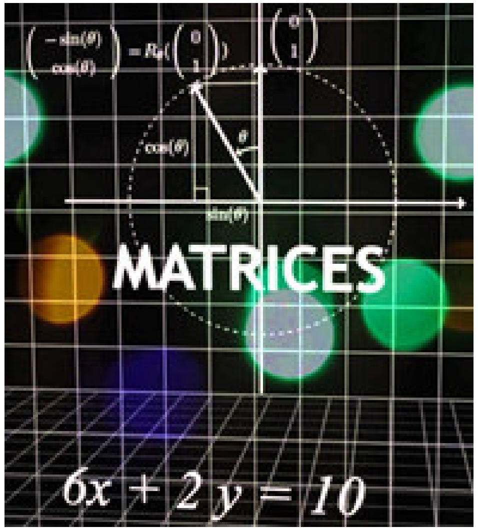


VI. Lineare Algebra

Matrixgleichungen & LGS lösen

Dr. Peter Lambé

Matrixgleichungen

Neue mögliche Fragestellungen

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.1 - Löse Matrixgleichung

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{c}$ mit

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Matrix $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Lösung klassisch … für die Lösung dieser Aufgabe brauchen wir neue Techniken.

Durch Ausmultiplizieren findet man die beiden Bedingungen

$I \qquad 2\,x - 3\,y + z = 1$

$II \qquad 3\,x - 2\,z = 0$

d.h. es entsteht ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten.

- Die Koeffizienten des LGS bilden die Zeilen der Matrix M.
- Um die Matrixgleichung zu lösen, müssen wir das LGS lösen.

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.1 - Löse Matrixgleichung

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{c}$ mit

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Matrix $\boldsymbol{A} \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Lösung A: Durch Ausmultiplizieren und komponentenweiser Zerlegung findet man

die beiden verflochtenen linearen Gleichungen

$$I \qquad 2\,x - 3\,y + z = 1$$

$$II \qquad 3\,x \qquad - 2\,z = 0$$

$\boldsymbol{z = 0}$: $\quad y = -\dfrac{1}{3} \quad und \quad x = 0$

$\boldsymbol{z = 1}$: $\quad y = \dfrac{4}{9} \quad und \quad x = \dfrac{2}{3}$

Für jedes $z \in \mathbb{R}$ gibt es eine Lösung, z.B.: $\boldsymbol{z = 3}$: $\quad y = 2 \quad und \quad x = 2$

Matrixgleichungen

Allgemein:

Jede ***Matrixgleichung*** der Form

$$\boldsymbol{A} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\boldsymbol{c}}$$

- mit einer $[n \times m]$-Matrix $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i, \le n, 1 \le j \le m}$
- einem variablen $[m \times 1]$-Spaltenvektor $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ und
- einem vorgegebenem, konstanten $[n \times 1]$-Spaltenvektor $\vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Matrixgleichungen

Allgemein:

Jede ***Matrixgleichung*** der Form

$$\boldsymbol{A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{c}}$$

repräsentiert genau ein ***Lineares Gleichungssystem***
mit n-Gleichungen und m-Unbekannten und umgekehrt:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} \cdot x_1 + & \cdots & + a_{1m} \cdot x_m & = & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + & \ldots & + a_{nm} \cdot x_m & = & c_n \end{array}$$

Matrixgleichungen

Matrixgleichungen

***LGS* …. Definitionen, Verabredungen, Schreibweisen**

- x, y, z sind die Unbekannten („Variablen“), die Werte aus den reellen Zahlen annehmen sollen. Oft werden die Variablen durch Indizes nummeriert.

  Das LGS sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{lrrrl} I & 2\,x_1 - & 3x_2 + & x_3 = & 1 \\ II & 3\,x_1 & & -\ 2x_3 = & 0 \end{array}$$

- Alle Variablen tauchen nur in der ersten Potenz auf und es gibt auch keine Produkte
- Die Zahlen vor den Variablen heißen Koeffizienten.
- Die Gleichungen werden mit römischen Ziffern durchnummeriert

$$(I = 1, \quad II = 2, \quad III = 3, \quad IV = 4, \quad V = 5, \ldots.)$$

Matrixgleichungen

***LGS* …. Lösbarkeit**

- Ein Vektor ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems,

  wenn er die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{c}}$ erfüllt.

- Die ***Lösungsmenge*** $\mathcal{L}$ eines LGS besteht aus ***Vektoren*** z.B.

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

- ***Ob und wie viele Lösungen*** ein Gleichungssystem besitzt ist zunächst unklar.

  Prinzipiell können drei Typen auftreten:

  - TYP A Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen
  - TYP B Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
  - TYP C Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung $\mathcal{L} = \emptyset$.

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.1 - Löse Matrixgleichung

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{c}$ mit

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Matrix $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG klassisch: Zur Lösung betrachten wir das LGS genauer.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} I & 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ II & 3x & & & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

- Das LGS hat mehr Variablen als Bedingungen => Es hat mehr als eine Lösung (TYP A).
- Mit einer elementaren Methode („**Einsetzungsverfahren**“) können wir für jedes $z \in \mathbb{R}$ eine komplette Lösung als Vektor angeben.
- Die „Allgemeine Lösung“ lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{2}/_{3} \cdot t \\ -{}^{1}/_{3} + {}^{7}/_{9}\, t \\ 1 \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -{}^{1}/_{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} {}^{2}/_{3} \\ {}^{7}/_{9} \\ 1 \end{pmatrix} \; \textit{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.1 - Löse Matrixgleichung

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ mit

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Matrix $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG klassisch: Zur Lösung betrachten wir das LGS genauer.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} I & 2\,x & - & 3\,y & + & z & = & 0 \\ II & 3\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \end{array}$$

- Das LGS hat mehr Variablen als Bedingungen => Es hat mehr als eine Lösung (TYP A).
- Mit einer elementaren Methode („**Einsetzungsverfahren**“) können wir für jedes $z \in \mathbb{R}$ eine komplette Lösung als Vektor angeben.
- Die „Allgemeine Lösung“ lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2/_3 \cdot t \\ {}^7/_9 \cdot t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2/_3 \\ {}^7/_9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \text{für } alle\ t \in \mathbb{R}$$

Matrixgleichungen lösen

- **Elementare Lösungsmethoden**
  - Additionsverfahren
  - Gleichsetzungsverfahren
  - Einsetzungsverfahren

  insb. bei kleinen Matrizen (2x2) , aber auch bei oberen Dreiecksmatrizen.

- **Gauß-Verfahren** Ziel: „Obere Dreiecksmatrix“
  - Geschickte Addition von Zeilen
  - Die Lösung des LGS wird abschließend durch fortgesetztes Einsetzungsverfahren errechnet.
- **Pivotieren** Ziel: „Diagonalmatrix“ bzw. „Einheitsmatrix“
  - Sukzessive werden die Spalten leer geräumt
  - immer gleiche Operation auf den verbleibenden Elemente der Matrix

Matrixgleichungen lösen

- Im Rahmen der Matrizenrechnung beschränken wir uns wieder nur auf **die** Zahlen. Wir betrachtet anstelle der einzelnen Gleichungen die
- ***„erweiterte Matrix“***

$$(A \,|\, \vec{c}) = (a_{ij} \,|\, c_i) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & c_n \end{array}\right)$$

- In der erweiterten $[n \times m + 1]$ -Matrix sind alle Koeffizienten des Linearen Gleichungssystems enthalten.

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.2.1 - Löse Matrixgleichung Typ A – unendliche viele Lösungen

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Erstelle die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Lösung

Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Matrixgleichungen

4.2.1 Pivotschritte im Einzelnen:

Pivotwahl

1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	-1	-3

⇨

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	5	-5	-10

⇨

1	0	2	3
0	1	-1	-2
0	0	0	0

Markiere PZ,PS

1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	-1	-3

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	5	-5	-10

Geschenke
Restmatrix

1	-2	4	7
0	*	*	*
0	*	*	*

1	0	*	*
0	5	-5	-10
0	0	*	*

Pivotieren

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	*	*	*

1	0	2	3
0	5	-5	-10
0	0	*	*

Pivotieren

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	5	-5	-10

1	0	2	3
0	5	-5	-10
0	0	0	0

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.2.1 - Löse Matrixgleichung Typ A – unendliche viele Lösungen

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung durch 2 Pivotschritte:

Es ist eine Nullzeile entstanden.
Insbesondere ist das Diagonalelement in der dritten Spalte gleich Null, damit ist die dritte Variable z frei wählbar.

Mit $z := t$ erhalten wir die allgemeine Lösung:
$y = -2 + t,\ x = 3 - 2t$

bzw. in Vektorschreibweise:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.2.2 - Löse Matrixgleichung Typ B – genau eine Lösung

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösung durch 3 Pivotschritte:

1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	0	-4

⇨

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	5	-4	-11

⇨

1	0	2	3
0	5	-5	-10
0	0	1	-1

⇨

1	0	0	5
0	5	0	-15
0	0	1	-1

in Vektorschreibweise:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Matrixgleichungen

4.2.2 Pivotschritte im Einzelnen:

Pivotwahl	1	-2	4	7	1	-2	4	7	1	0	2	3	1	0	0	5
	2	1	3	4	0	5	-5	-10	0	5	-5	-10	0	5	0	-15
	1	3	0	-4	0	5	-4	-11	0	0	1	-1	0	0	1	1
Markiere PZ,PS	1	-2	4	7	1	-2	4	7	1	0	2	3				
	2	1	3	4	0	5	-5	-10	0	5	-5	-10				
	1	3	0	-4	0	5	-4	-11	0	0	1	-1				
Geschenke	1	-2	4	7	1	0	*	*	1	0	0	*				
Restmatrix	0	*	*	*	0	5	-5	-10	0	5	0	*				
	0	*	*	*	0	0	*	*	0	0	1	1				
	1	-2	4	7	1	0	2	3	1	0	0	5				
Pivotieren	0	5	-5	-10	0	5	-5	-10	0	5	0	*				
	0	*	*	*	0	0	*	*	0	0	1	1				
	1	-2	4	7	1	0	2	3	1	0	0	5				
	0	5	-5	-10	0	5	-5	-10	0	5	0	-15				
Pivotieren	0	5	-4	-11	0	0	1	-1	0	0	1	1				

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.2.2 - Lösen eines LGS

Lösung A: Gauß-Verfahren

Lösen mit dem Gauß-Verfahren

Löschen

Wir bringen die erwieterte Systemmatrix in die Treppenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right) \times (-2) \quad \mathrm{II} - 2 \tilde{\times} I \rightarrow \mathrm{II}$$

$$\equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right) \times (-1) \quad \mathrm{III} - 1 \tilde{\times} I \rightarrow \mathrm{III}$$

$$\equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 5 & -4 & -11 \end{array}\right) \times (-1) \quad \mathrm{III} - 1 \tilde{\times} \mathrm{II} \rightarrow \mathrm{III}$$

$$\equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

3-(-2)*1/1= 5

0-(4)*1/1= -4

-4-7*1/1= -11

Das Gauß-Verfahren geht ***zeilenweise*** vor, dabei müssen viele kleine Rechnungen in einem Schritt gemacht werden.

Matrixgleichungen

Lösen eines LGS – durch Pivotieren – Pivotelement $\boldsymbol{a_{kl}}$

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times m$-Matrix und $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ eine Matrixgleichung/ein LGS mit n Zeilen und m Unbekannten.

Lösung durch Pivotieren

- Das Addieren von Vielfachen zweier Zeilen aus dem Gauß-Verfahren kennen, ersetzen wir durch die entsprechende Operation direkt auf den Elementen.
- Das soll das Lösen von LGS übersichtlicher machen.
- Es besteht aus 4 Schritten auf der „erweiterten Matrix“ $(\boldsymbol{A}|\vec{\boldsymbol{c}})$
  1. Pivotwahl
  2. Ausblenden von Pivotzeile und Pivotspalte => Restmatrix
  3. Pivotieren der Restmatrix
  4. Belohnung

Matrixgleichungen

Lösen eines LGS – durch Pivotieren – Pivotelement $\boldsymbol{a_{kl}}$

Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times m$-Matrix und $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ eine Matrixgleichung/ein LGS mit n Zeilen und m Unbekannten.

Schritt 1: Wähle ***Pivotelement*** $a_{kl} \neq 0$.

Schritt 2: Streiche gedanklich Zeile und Spalte des Pivotelementes (***Pivotzeile/Pivotspalte***)

Schritt 3: Pivotiere = Ersetze jedes Element der ***Restmatrix*** durch das folgende Verfahren *(RECHTECKSREGEL)*

$$\boldsymbol{a_{ij,NEU} \coloneqq a_{ij} - a_{kj}a_{il}/a_{kl}}$$

Schritt 4: Belohnung => $\boldsymbol{a_{kj,NEU} = a_{kj}}$ Pivotzeile abschreiben

Belohnung => $\boldsymbol{a_{il,NEU} = 0}$, $\text{\textit{für alle}}\ \boldsymbol{i \neq k}$ Pivotspalte löschen

Matrixgleichungen

Pivotieren – Pivotelement a_{kl}

Schritt 1: Wahl des ***Pivotelementes***

$a_{kl} \neq 0.$

Schritt 2: Streiche gedanklich Zeile und die Spalte des Pivotelementes (***Pivotzeile/Pivotspalte***)

Schritt 3: Ersetze jedes Element der ***Restmatrix*** durch das folgende

$$a_{ij,NEU} := a_{ij} - a_{kj} \cdot a_{il} / a_{kl}$$

$(RECHTECKSREGEL)$

Schritt 4: **Belohnung für $i \neq k$**

setze alle a_{il} in der Pivotspalte $= 0$ und schreibe Pivotzeile ab.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1l} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{il} & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{kj} & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nl} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11,NEU} & a_{1j,NEU} & 0 & a_{1m,NEU} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1,NEU} & a_{ij,NEU} & 0 & a_{im,NEU} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{kj} & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1,NEU} & a_{nj,NEU} & 0 & a_{nm,NEU} \end{pmatrix}$$

Matrixgleichungen

Pivotieren – Pivotelement $\boldsymbol{a_{kl}}$

Schritt 4: **Belohnung für $\boldsymbol{i \neq k}$**

setze alle $\boldsymbol{a_{il}}$ in der Pivotspalte $= 0$ und schreibe Pivotzeile ab.

$$\begin{pmatrix} a_{11,NEU} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1m,NEU} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & \boldsymbol{a_{kl}} & \cdots & a_{km} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1,NEU} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nm,NEU} \end{pmatrix}$$

Matrixgleichungen

Pivotieren – Pivotelement a_{kl}

Zusammenfassung:

Nach Anwenden der Rechteckregel $a_{ij,NEU} := a_{ij} - a_{kj}a_{il}/a_{kl}$ auf die Elemente der Restmatrix , kann die Pivotspalte – außer dem Pivotelement selbst gleich Null gesetzt werden. Die Pivotzeile bleibt unberührt und kann 1 zu 1 abgeschrieben werden:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{1j} & a_{1l} & a_{1m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{ij} & a_{il} & a_{im} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & a_{kj} & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{nj} & a_{nl} & a_{nm}
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
a_{11,NEU} & a_{1j,NEU} & 0 & a_{1m,NEU} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1,NEU} & a_{ij,NEU} & 0 & a_{im,NEU} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & a_{kj} & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1,NEU} & a_{nj,NEU} & 0 & a_{nm,NEU}
\end{pmatrix}
$$

Matrixgleichungen

Pivotieren – Pivotelement a_{kl} wählen

TIP 1: START/STOP

START

- Das Pivotelement wird nur in der Koeffizientenmatrix A gewählt.
- Bei der Wahl des Pivotelementes fängt man am besten oben links an.
- Für die Wahl weiterer Pivots sind die bereits verbrauchten Pivotzeilen und –spalten tabu.

STOP (Ziel erreicht = Diagonalmatrix)

- Das Pivotverfahren ist automatisch zu Ende, wenn es keine weiteren möglichen Pivotelemente gibt.
- D.h. die Matrix nach Streichung sämtlicher bereits verbrauchter Pivotzeilen
  - ist leer, d.h. sie enthält keine weiteren Zeilen mehr oder
  - die Einträge in den Zeilen sind sämtlich gleich Null.

Matrixgleichungen

Pivotieren – Pivotelement a_{kl}

TIP 2: Ist eines der beiden Nebendiagonalelemente a_{kj} bzw. a_{il} gleich Null,

dann ist $a_{ij,NEU} = a_{ij}$ für alle i bzw. j, d.h.

- enthält die Pivotzeile bereits eine 0, dann kann die entsprechende Spalte einfach abgeschrieben werden

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1l} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{il} & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{kj}=0 & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nl} & a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11,NEU} & a_{1j} & 0 & a_{1m,NEU} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1,NEU} & a_{ij} & 0 & a_{im,NEU} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & 0 & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1,NEU} & a_{nj} & 0 & a_{nm,NEU} \end{pmatrix}$$

- Das ist der Grund dafür, dass von Pivotschritt zu Pivotschritt immer weniger Elemente neu zu berechnen sind.

Matrixgleichungen

Pivotieren – Pivotelement a_{kl}

TIP 2: … und ebenso andersherum:

- enthält die Pivotspalte bereits eine 0,
- dann kann die entsprechende Zeile einfach abgeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1l} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{il}=0 & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{kj} & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & a_{nl} & a_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11,NEU} & a_{1j,NEU} & 0 & a_{1m,NEU} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & 0 & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{kj} & \boxed{a_{kl}} & a_{km} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1,NEU} & a_{nj,NEU} & 0 & a_{nm,NEU} \end{pmatrix}$$

Matrixgleichungen

TIP 2: Pivotregeln für Fortgeschrittene:

- Steht in einer Pivotzeile bereits eine 0, $a_{kj} = 0$,
  kann die dazugehörige Spalte einfach abgeschrieben werden.

- Steht in einer Pivotspalte bereits eine 0, $a_{il} = 0$,
  kann die dazugehörige Zeile einfach abgeschrieben werden.

$$a_{ij,NEU} \coloneqq a_{ij} - a_{kj}a_{il}/a_{kl} = a_{ij}$$

Matrixgleichungen

Pivotieren – Pivotelement a_{kl}

Bemerkung für Mathe-Freaks:

Sei M die Untermatrix, die nur aus den Elementen des Rechtecks besteht

$$M = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{pmatrix},$$ dann gilt

$$a_{ij,NEU} = \frac{a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{il}}{a_{kl}} = \frac{det(M)}{a_{kl}} = \frac{det(M)}{pivot}$$

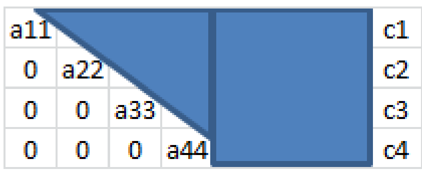
Ist $det(M) = 0$, dann ist $a_{ij,NEU} = 0$.

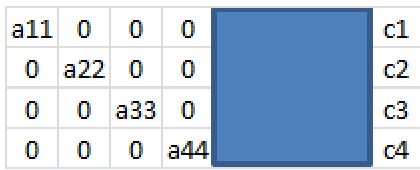
Matrixgleichungen

Learning Points zu Matrixgleichungen und lineare Gleichungssysteme (LGS)

- Jede Matrixgleichung entspricht genau einem LGS
- Lösung der MG durch lösen des LGS
- Ein LGS kann
  Typ A = unendlich viele Lösungen
  Typ B = genau eine Lösung
  Typ C = keine Lösung
  haben
  Typen B und C müssen wir noch genauer betrachten.
  Beispiele/Aufgaben auf den nächsten Seiten.
- Zur Feststellung des Typs, genügt es die ursprüngliche Matrix durch „elementare Zeilenoperationen“ in eine allgemeine obere Dreiecksmatrix zu verwandeln.

Mit Gauß oder durch Pivotieren





- Danach kann man für Typ A und B Lösungen ausrechnen …. durch sukzessives Einsetzten und Auswerten der Gleichungen von unten nach oben („Einsetzungsverfahren“)

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.2.3 - Löse Matrixgleichung Typ C – keine Lösung
Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung in 2 Pivotschritten:

1	-2	4	1
2	1	3	1
1	3	-1	1

⇨

1	-2	4	7
0	5	-5	-1
0	5	-5	0

⇨

1	0	2	6,6
0	5	-5	-1
0	0	0	1

Die letzte Zeile bedeutet $0 \cdot z = 1.$
Widerspruch! $\Rightarrow$ keine Lösung.

Antwort: Die Lösungsmenge ist leer, $\mathcal{L} = \emptyset$.

Matrixgleichungen

4.2.3 Pivotschritte im Einzelnen:

Pivotwahl

1	-2	4	1
2	1	3	1
1	3	-1	1

Markiere PZ,PS

$\boxed{1}$	-2	4	1
2	1	3	1
1	3	-1	1

Geschenke
Restmatrix

$\boxed{1}$	-2	4	7
0	*	*	*
0	*	*	*

Pivotieren

$\boxed{1}$	-2	4	7
0	5	-5	-1
0	*	*	*

Pivotieren

$\boxed{1}$	-2	4	7
0	5	-5	-1
0	5	-5	0

1	-2	4	7
0	5	-5	-1
0	5	-5	0

1	-2	4	7
0	$\boxed{5}$	-5	-1
0	5	-5	0

1	0	*	*
0	$\boxed{5}$	-5	-10
0	0	*	*

1	0	2	6,6
0	$\boxed{5}$	-5	-1
0	0	*	*

1	0	2	6,6
0	$\boxed{5}$	-5	-1
0	0	0	1

1	0	2	6,6
0	5	-5	-1
0	0	0	1

kein Pivotelement $\neq 0$

$\Rightarrow$ PIVOTENDE

Typ A unendlich viele Lösungen

START

1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	-1	-3

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	5	-5	-10

ZIEL

1	0	2	3
0	5	-5	-10
0	0	0	0

PIVOTENDE

x =	3-2t =	1
y =	(-10+5t)/5 = -2+t	-1
z =	t =	1

Probe:

			1
			-1
			1
1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	-1	-3

Typ B genau eine Lösung

1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	0	-4

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	5	-4	-11

1	0	2	3
0	5	-5	-10
0	0	1	-1

1	0	0	5
0	5	0	-15
0	0	1	-1

PIVOTENDE

x =	5 =	5
y =	-15/5 =	-3
z =	-1 =	-1

Probe:

			5
			-3
			-1
1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	0	-4

TYP C keine Lösung

1	-2	4	7
2	1	3	4
1	3	-1	3

1	-2	4	7
0	5	-5	-10
0	5	-5	-4

1	0	2	3
0	5	-5	-10
0	0	0	6

PIVOTENDE

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.3 - Löse Matrixgleichung - Spezielle Matrizen vom TYP B

Welche Matrix gehört zu welcher Lösung der Matrixgleichung $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

$$A = U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = D = \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A = O = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordnen sie den Matrizen den folgenden **Lösungen** zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14/3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/43 \\ 2/56 \\ 3/18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Matrixgleichungen

Aufgabe 4.4 - Löse Matrixgleichung - Spezielle Matrizen vom Typ A

Bestimmen Sie die Lösungen der Matrixgleichung

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ für } \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Erste und zweite Zeile tauschen, danach Pivot oder Gauß:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}125 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}375 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}375 & 0{,}25 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}125 \\ -0{,}375 \\ 0{,}375 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Antwort: Die allgemeine Lösung mit $w := t \in \mathbb{R}$ lautet

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}125 \\ -0{,}375 \\ 0{,}375 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R} \right\}$$

Matrixgleichungen

4.4 Pivotschritte im Einzelnen:

Pivotwahl

2	2	0	1	2
0	1	1	0	1
-1	4	1	1	3

2	2	0	1	2
0	1	1	0	1
0	5	1	1,5	4

2	0	-2	1	0
0	1	1	0	1
0	0	-4	1,5	-1

Markiere PZ,PS

2	2	0	1	2
0	1	1	0	1
-1	4	1	1	3

2	2	0	1	2
0	1	1	0	1
0	5	1	1,5	4

2	0	-2	1	0
0	1	1	0	1
0	0	-4	1,5	-1

Geschenke
Restmatrix

2	2	0	1	2
0	*	*	*	*
0	*	*	*	*

2	0	*	*	*
0	1	1	0	1
0	0	*	*	*

2	0	0	*	*
0	1	0	*	*
0	0	-4	1,5	-1

Pivotieren

2	2	0	1	2
0	1	1	0	1
0	*	*	*	*

2	0	-2	1	0
0	1	1	0	1
0	0	*	*	*

2	0	0	0,25	0,5
0	1	0	*	*
0	0	-4	1,5	-1

Pivotieren

2	2	0	1	2
0	1	1	0	1
0	5	1	1,5	4

2	0	-2	1	0
0	1	1	0	1
0	0	-4	1,5	-1

2	0	0	0,25	0,5
0	1	0	0,375	0,75
0	0	-4	1,5	-1

PIVOTENDE

1	0	0	0,125	0,25
0	1	0	0,375	0,75
0	0	1	-0,375	0,25

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}125 \\ -0{,}375 \\ 0{,}375 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überblick

Zulässige Operationen,
die auf der erweiterten Matrix ohne Veränderung der Lösungsmenge
beim Lösen eingesetzt werden:

- Linearkombination zweier Zeilen hinzufügen:
  - Multiplikation einer Zeile
    mit einer reellen Zahl
  - Addition/Subtraktion eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (Gauß)
- Vertauschen von zwei Zeilen
- Pivot-Operationen
- Linear abhängige Zeilen eliminieren
  - Mindestens eine kann gelöscht werden

Überblick

Darstellung der Lösungsmenge

Die Lösungsmenge besteht aus den Lösungsvektoren und lässt sich stets in der folgenden Form darstellen:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}} + \boxed{t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}125 \\ -0{,}375 \\ 0{,}375 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}} \right\}$$

Bestandteile

- Spezielle Lösung
- Lösungsmenge des homogenen Systems

Matrixgleichungen und LGS

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit