FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Elektrische Messtechnik

Vorlesung 7

Prof. Dr. Peter Weber

Wintersemester 24/25

Im Studiengang Elektro- und Informationstechnik (B.Eng.)

Spielregeln in der Präsenz-Vorlesung

- Ihre Fragen und Anmerkungen gehen vor - Unterbrechen Sie mich gerne, wenn ich Ihre Meldung übersehen sollte
- Keine „Side Meetings“ in der Vorlesung - Paralleldiskussionen zu zweit verbreiten zu viel Unruhe
  - ➔ Fragen, Ideen oder Anmerkungen bitte immer in die große Runde – keine Hemmungen
  - ➔ Es gibt keine dummen Fragen - Niemand wird für eine Wortmeldung „augebuht“!
- Pünktlich erscheinen - Später hereintröpfelnde Teilnehmer verbreiten zu viel Unruhe
- Verlassen der Vorlesung bitte nur zur Pause oder zum Ende (logischerweise ausgenommen Toilettengänge)
- Am Ende der Vorlesung den letzten Satz vor dem Aufstehen abwarten.
- Telefone auf „leise“
- Ich wünsche mir immer Ihr Feedback – sofort in der Vorlesung oder gerne auch z.B. per mail

Organisation

Vorlesung:

Donnerstag 08:15 h bis 11:30 h Raum: 8-105

Start 21.10.2024 - Ende 12.02.2025

Labor (Herr Michalik):

Montag 11:45 h bis 15:45 h Raum: 8-205

Terminorganisation bei Herrn Michalik

CampUAS – Vorlesung (P. Weber):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4525

Weber: Elektrische Messtechnik - WS 24/25

Enrollment Key: alessandrovolta

CampUAS – Labor (R. Michalik):

https://campuas.frankfurt-university.de/course/view.php?id=4433

Michalik: Labor Elektrische Messtechnik - WiSe 24

Enrollment Key: MT-LAB-WS24

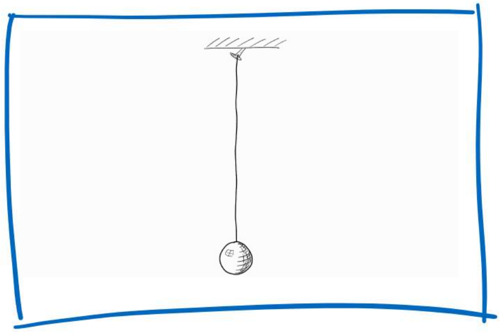
Bitte unbedingt in beiden Kursen einschreiben (auch bei Herrn Michalik).

Sie verpassen sonst wichtige Infos bzw. werden bei der Laborterminvergabe nicht berücksichtigt

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Schwingung

Periodendauer

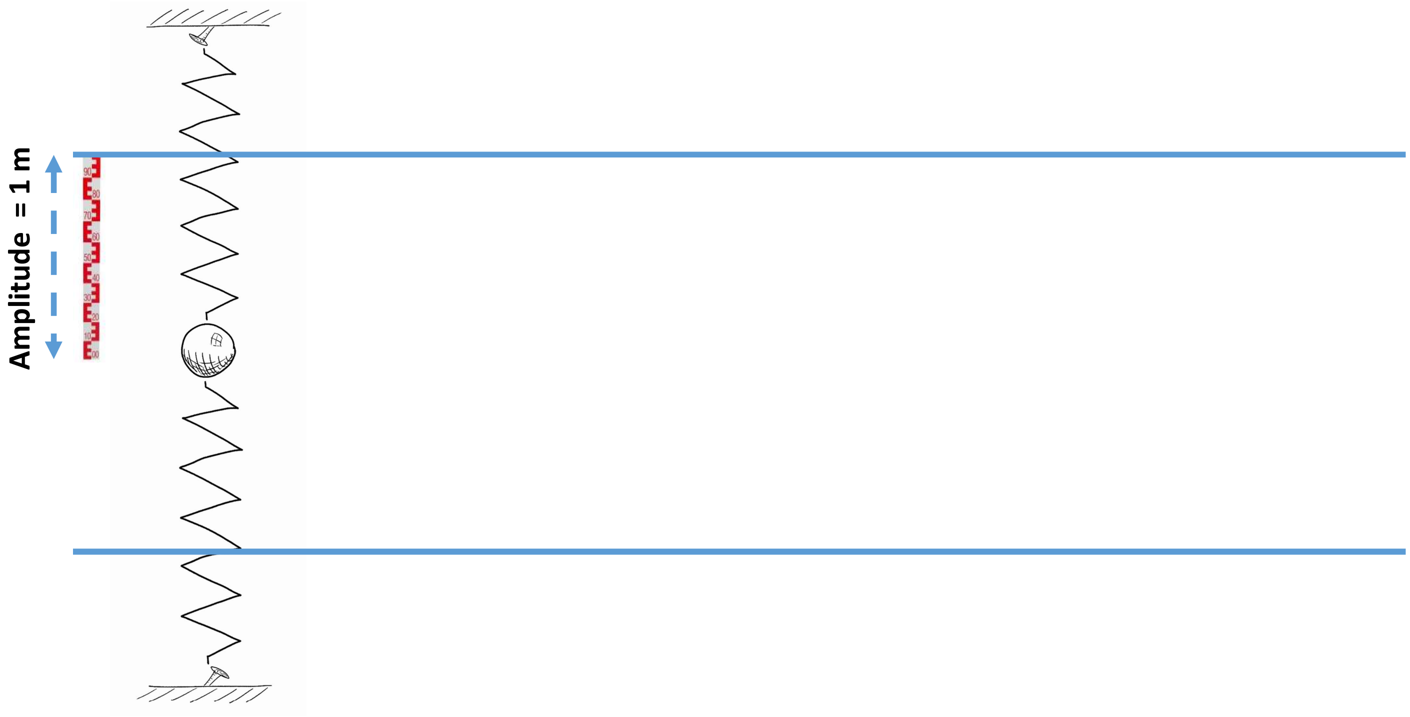


Amplitude

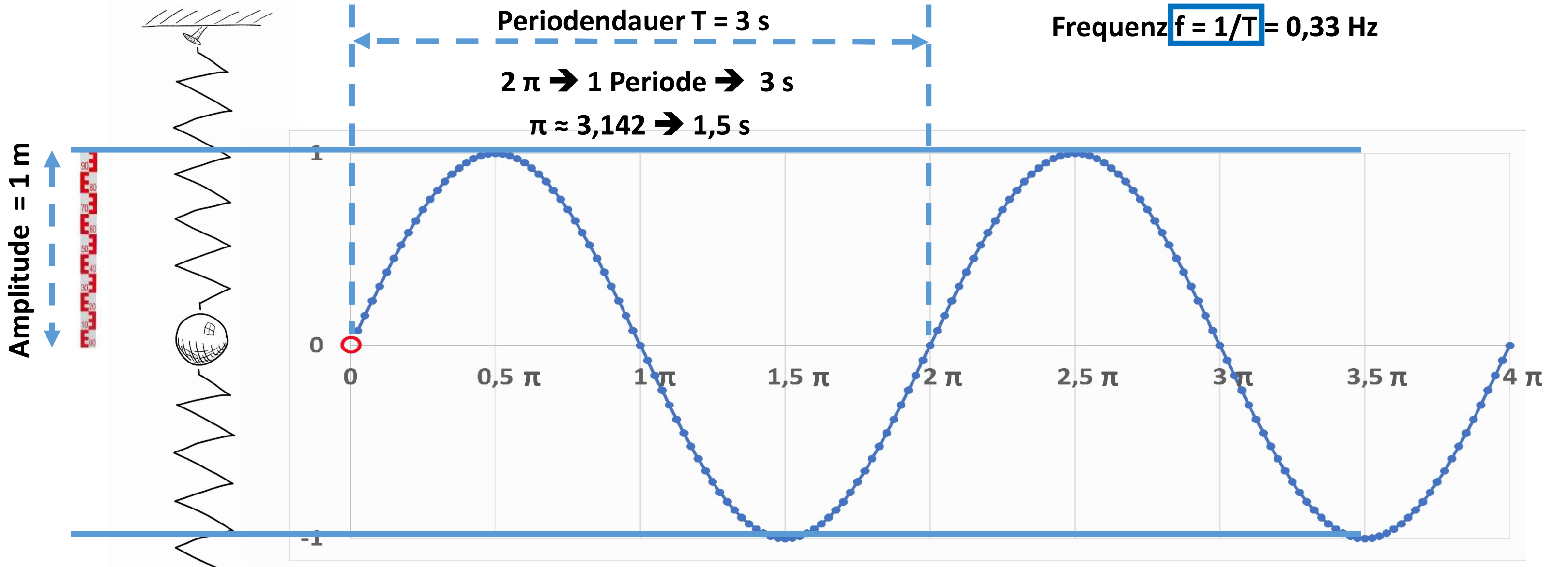
Frequenz

Mathematisches Modell:
Harmonischer Oszillator
Sinusschwingung

Charakterisierung periodischer Vorgänge

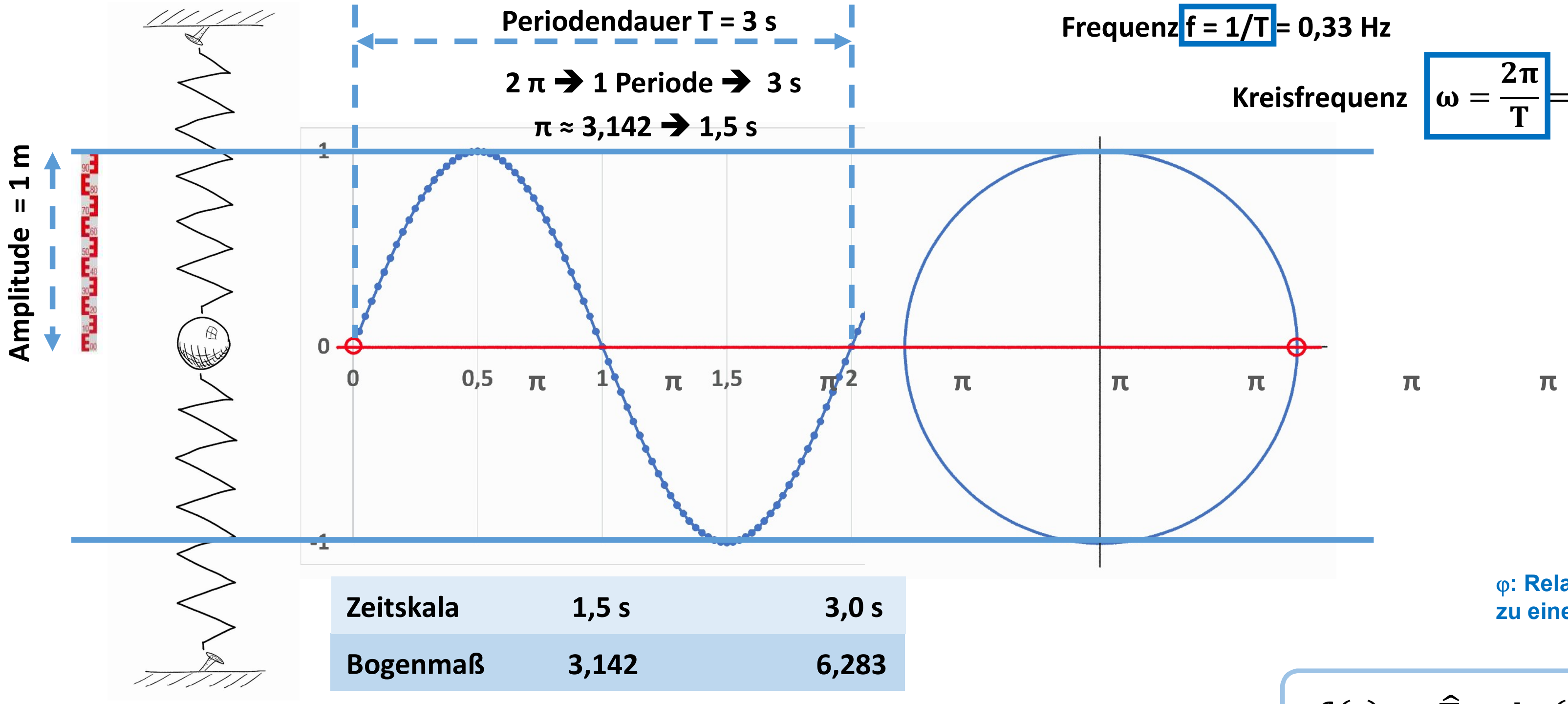


Charakterisierung periodischer Vorgänge



Zeitskala	1,5 s	3,0 s	4,5 s	6,0 s
Bogenmaß	3,142	6,283	9,425	12,566

Charakterisierung periodischer Vorgänge



Frequenz $\boxed{f = 1/T}$ = 0,33 Hz

Kreisfrequenz $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{3\ s} = 2,1\ \frac{1}{s}$

Zeitskala	1,5 s	3,0 s
Bogenmaß	3,142	6,283

φ: Relative Phasenverschiebung zu einem definierten Zeitpunkt t=0

$$\boxed{f(t) = \hat{F} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}$$

Charakterisierung periodischer Vorgänge

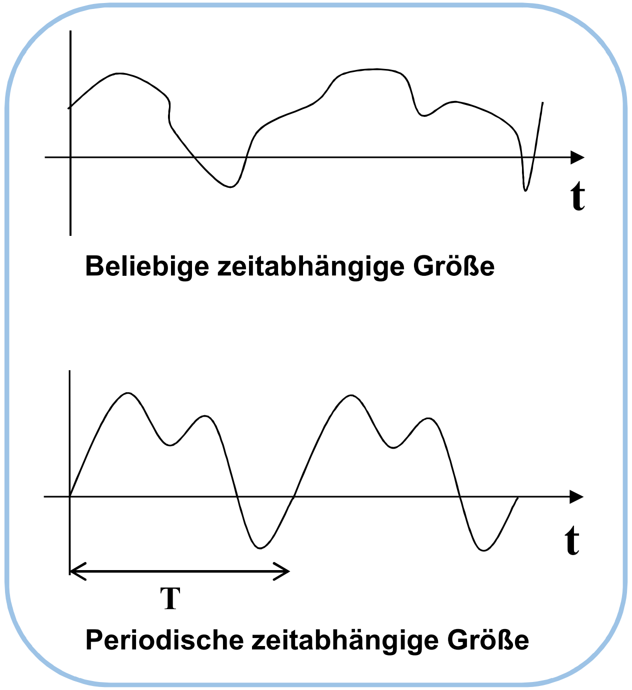
Zwei Arten zeitabhängiger Größen
- beliebig zeitlich veränderlich
- periodisch zeitlich veränderlich

Für eine periodische zeitabhängige Größe X(t) muss gelten:

$X(t) = X(t + T)$

T: Periodendauer [T] = s
f: Frequenz [f] = Hz = 1/s (Hertz)

$f = 1 / T$

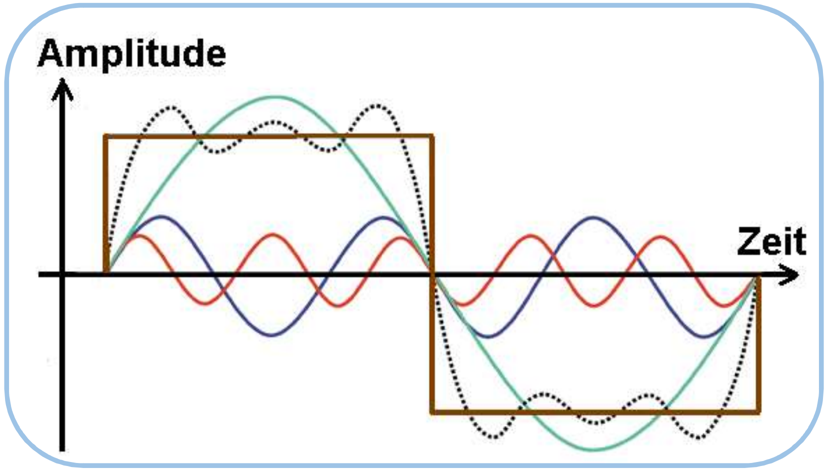


Charakterisierung periodischer Vorgänge

Mathematische Grundlage:

Fourier Reihenenwicklung

Jede periodische Funktion kann durch die Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz und Amplitude und einem Gleichanteil (Konstante) dargestellt werden. (Fourier-Reihen-Entwicklung)



$$X(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)$$

Praktisch bedeutet das:

Ist die Antwort eines Systems auf eine Sinusschwingung bekannt, so kennen wir die Antwort des Systems auf beliebige periodische Funktionen.

Mit anderen Worten: Es reicht zunächst einmal aus, das wir uns mit dem Spezialfall der Sinusschwingung beschäftigen!

Und für lineare Systeme gilt:
Speise ich ein Input-Signal mit der Frequenz f_0 ein, so kann jedes an beliebiger Stelle abgegriffenen Output-Signal auch nur die Frequenz f_0 haben.

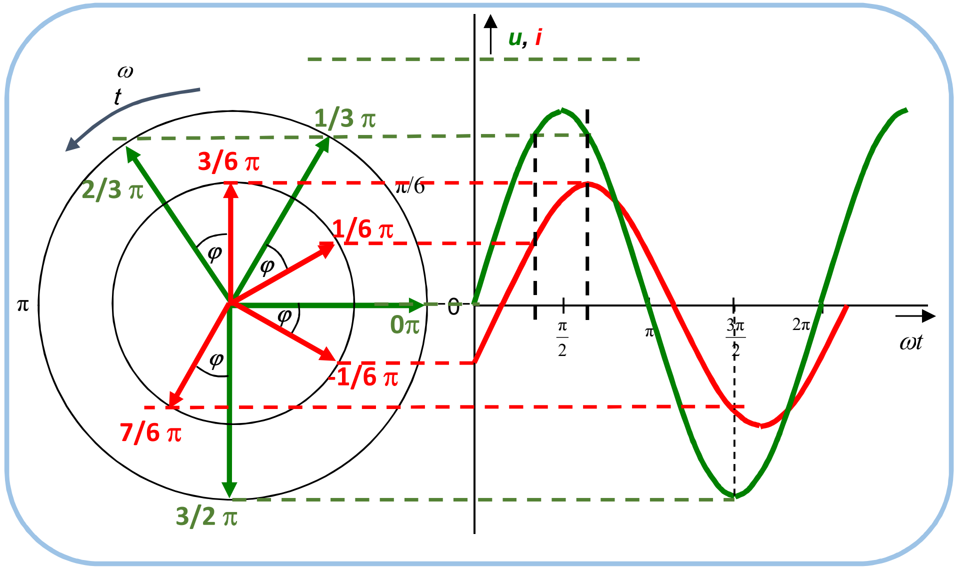
Zeigerdarstellung

Analogie zwischen Schwingung und Kreisbewegung

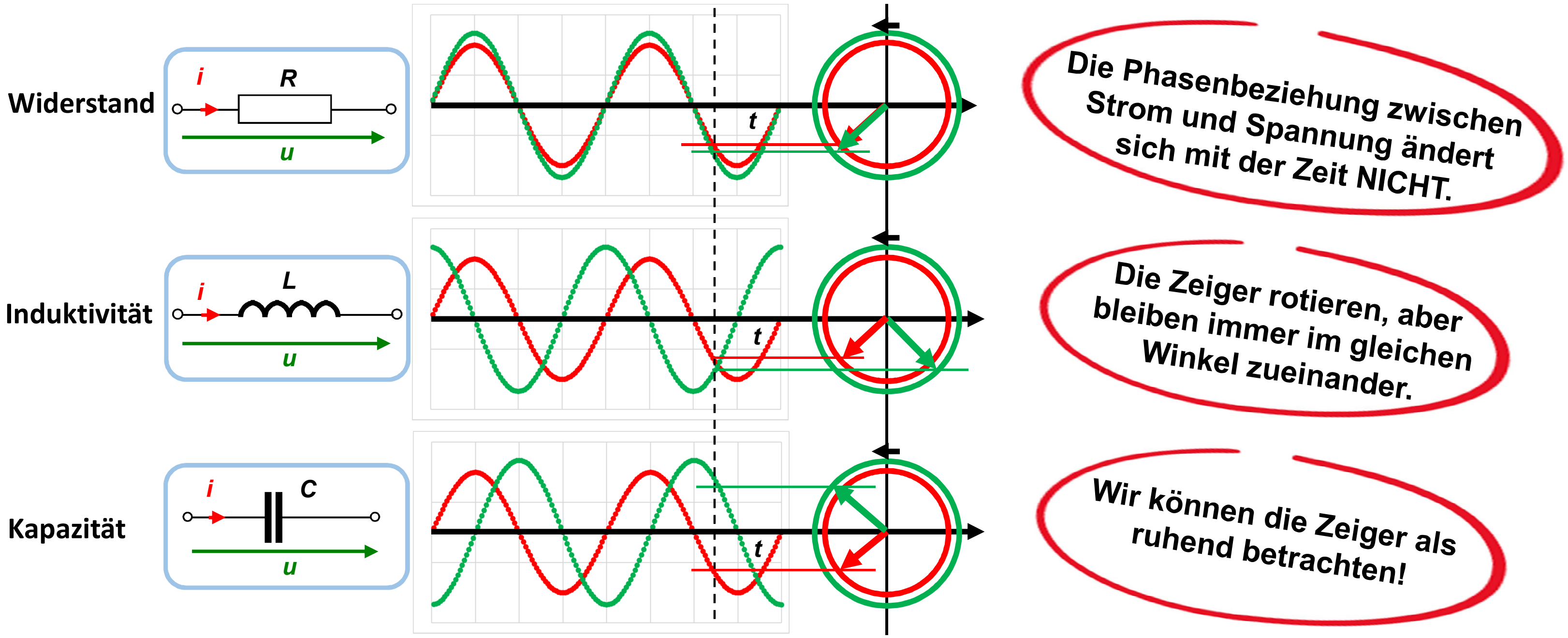
- Eine Schwingung kann als Projektion einer Kreisbewegung betrachtet werden.
- Alle Wechselgrößen einer Schaltung haben die gleiche Frequenz, aber eine gewisse Phasenlage φ zueinander.

Das bedeutet:

- Jede Wechselgröße kann durch einen rotierenden Zeiger dargestellt werden
- Alle Zeiger rotieren mit gleicher Frequenz
- Die Lage der Zeiger zueinander bleibt immer gleich



Charakterisierung periodischer Vorgänge



Charakterisierung periodischer Vorgänge

Zeigerdarstellung

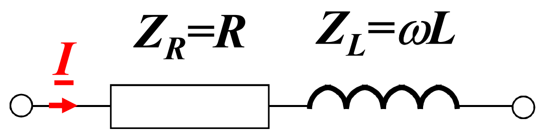
- Da die Frequenz aller Zeiger gleich ist, bleibt die Lage der Zeiger zueinander gleich. Damit reicht es aus, ruhende Zeiger zu betrachten.
- Die Länge der Zeiger entspricht dem Scheitelwert bzw. bei Division mit dem Effektivwert.
- Zeiger drehen sich entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn (mathematisch positiv), d.h., der Stromzeiger im Bild eilt dem Spannungszeiger nach.
- Der Phasenwinkel ergibt sich aus
- Das Symbol für einen Zeiger ist der unterstrichene Großbuchstabe:
- Zeigerbilder ergeben sich aus der geometrischen Addition der Zeiger und durch die Lage von Strom- und Spannungszeigern zueinander, was wiederum durch die Art der Bauelemente vorgegeben wird.

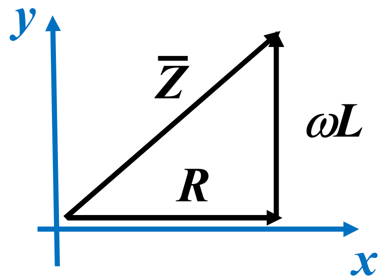
Charakterisierung periodischer Vorgänge

<u>**Zeiger-Darstellung in der reellen 2-dim. Zahlenebbene stößt auf Probleme**</u>

Impedanz $\vec{Z} = Z_R \cdot \overrightarrow{e_x} + Z_L \cdot \overrightarrow{e_y}$

$\vec{Z} = R \cdot \overrightarrow{e_x} + \omega L \cdot \overrightarrow{e_y}$





Admittanz $\vec{Y} = \frac{1}{\boxed{\vec{Z}}}$

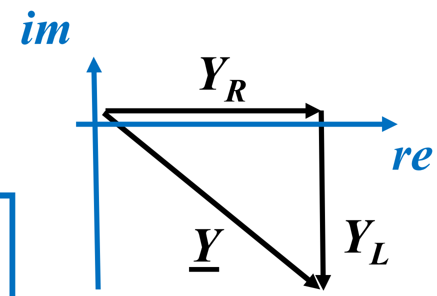
Division durch einen Vektor ist in der Matematik nicht möglich!!!

<u>**Aber in der komplexen Zahlenebene ist die Division möglich:**</u>

Impedanz $\underline{Z} = R + j \cdot \omega L$

Erweitern zur 3. binomischen Formel

Admittanz $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot \omega L} = \frac{(R - j \cdot \omega L)}{(R + j \cdot \omega L)(R - j \cdot \omega L)} = \underbrace{\boxed{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{Y_R} - j \underbrace{\boxed{\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{Y_L}$



Charakterisierung periodischer Vorgänge

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

FAZIT

Wir gehen hier davon aus,

dass die Größen Strom und Spannung

periodisch und (in der Regel) sinusförmig sind

Sie werden eindeutig bestimmt durch

eine Amplitude, eine (Kreis-) Frequenz und eine Phasenlage zueinander.

Und: In linearen Netzwerken ist die Frequenz für alle Größen gleich.

Bei der Analyse von Wechselstromnetzwerken

werden die relevanten Größen

durch Zeiger in der komplexen Zahlenebene dargestellt.

Die Länge der Zeiger entspricht der Amplitude der jeweiligen Größe.

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Mittelwert (arithmetisches Mittel)
einer zeitlich sich ändernden Größe zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2:

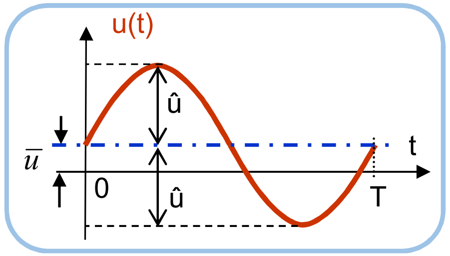
$$\bar{u} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt$$

Periodische Größen betrachten wir über eine oder mehrere Periodendauern T

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\boldsymbol{U_o + \hat{u}\cos(\omega t)}\right)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T U_o dt + \int_0^T \hat{u}\cos(\omega t)dt\right)$$

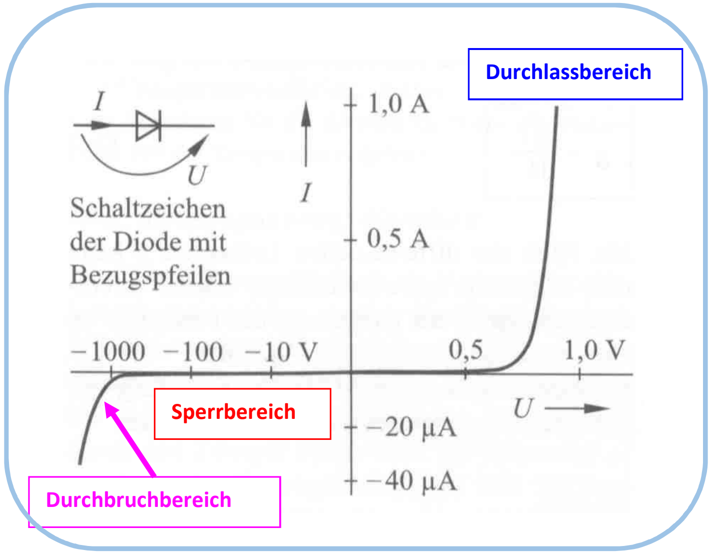
$$= U_o - \hat{u}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\Big|_o^T = U_o - \hat{u}\frac{1}{\omega}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\Big|_o^T = U_o$$

Mittelwert über die Periodendauer
bei einer sich zeitlich ändernden Größe
ist der Gleichanteil der Wechselgröße



Charakterisierung periodischer Vorgänge

Exkurs: Diode und Gleichrichtung
Nichtlineares Bauelement



Durchlassbereich:
- Leitet nach überschreiten der Durchlass- (Schleusen-) spannung
- z.B. 0,8 V bei Siliziumdioden

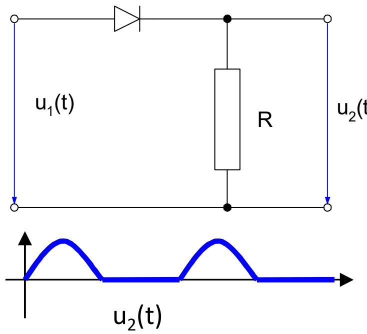
Sperrbereich
- Sperrt bis zum erreichen der Durchbruch- spannung
- Überschreiten führt zur Zerstörung

Besonderheit Zehnerdioden
Durchlassbereich:
- Wie normale Dioden

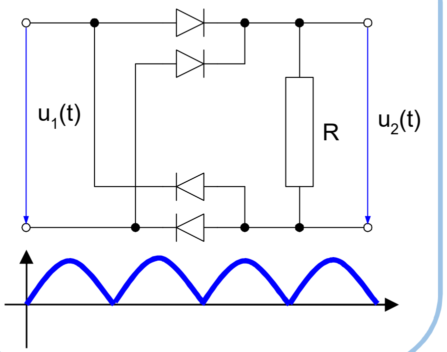
Sperrbereich
- Verringerte Durchbruchspannung
- Keine Zerstörung bei Überschreitung
- Anwendung Spannungsregelung

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Einweggleichrichter



Zweiweggleichrichter



Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt$$

Einweggleichrichter (für sinusförmige Größen)

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{U}}{\pi}$$

Zweiweggleichrichter – Brückengleichrichter

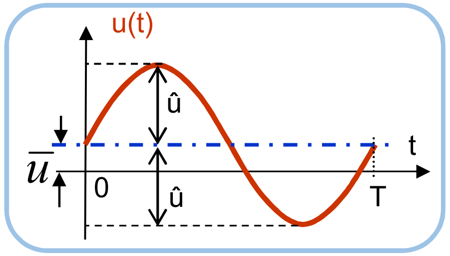
$$\overline{|u|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\hat{U} \cdot sin(\omega t)\right| d(\omega t) = 2\frac{\hat{U}}{\pi}$$

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Messung von periodischen Größen historisch betrachtet:

- Drehspulinstrument ➔ **Mittelwert**

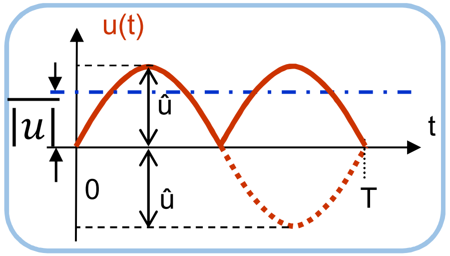
$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$



Ist der Gleichanteil
einer Wechselgröße

- Drehspulinstrument + Gleichrichter ➔ **Gleichrichtwertwert**

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt$$



Gibt an, welcher Gleichstrom dieselbe Ladungsmenge transportiert wie im zeitlichen Mittel der gleichgerichtete Wechselstrom

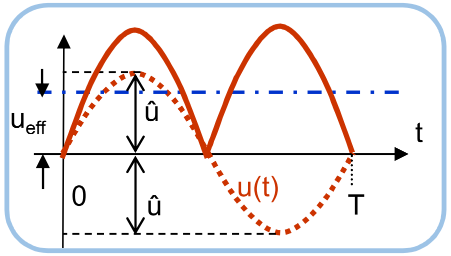
Charakterisierung periodischer Vorgänge

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Messung von periodischen Größen historisch betrachtet:

- Dreheiseninstrumente ➔ **Effektivwert** (quadratischer Mittelwert)

$$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |u^2(t)|dt}$$



Ist der Gleichstrom, der über einem Widerstand die gleiche Leistung umsetzen würde, wie der betrachtete Wechselstrom.

Der Effektivwert ist daher messtechnisch von großer Bedeutung.

Traditionell werden Nenngrößen als Effektivwerte angegeben.

- Drehspulinstrument + Gleichrichter + Formfaktor ➔ **Effektivwert**
- Amplituden konnten nicht direkt gemessen werden

Bei sinusförmigen Schwingungen ist der Scheitelfaktor:

$$\mathbf{k_S = \sqrt{2}}$$

Scheitelfaktor

Verhältnis von Amplitude zu Effektivwert

$$k_S = \frac{\hat{u}}{u_{eff}}$$

Formfaktor

Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert

$$k_f = \frac{U}{\overline{|u|}}$$

Charakterisierung periodischer Vorgänge

Der Gleichrichtwert hat eher nur noch historische Bedeutung.

Durch Kombination eines einfachen Drehspulinstrumentes mit einem Gleichrichter war dieser Wert einfach zu erfassen.

Der technisch bedeutsamere Effektivwert bestimmte sich dann über den Formfaktor. Wenn die relevante Größe keinen idealen Sinusverlauf hatte, konnten sich dabei erheblich Fehler ergeben.

Mit einem Dreheiseninstrument konnte der Effektivwert direkt gemessen werden. Die Amplitude war messtechnisch nicht ohne weiteres zugänglich. Daher hat sich die Angabe von Effektivwerten durchgesetzt.

Heute verfügen digitale Messgeräte über ausreichend hohe Abtastraten, um den zeitlichen Verlauf der Größen direkt abzutasten. Sowohl Effektivwert als auch Amplitude und Frequenz können dann aus den Daten berechnet bzw. gefittet werden.